

PAPER

MUSBAT BOG‘LIQLIK UCHUN MAKSIMAL TENGSIKLIK

Qalandarova Muxlisa To‘lqinjon qizi ^{1*}

¹ Navoiy Davlat Universiteti, Aniq fanlar fakulteti

* pulatovanuriniso9@gmail.com

Abstract

Ushbu maqolada musbat bog‘langan tasodifiy miqdorlar uchun maksimal tengsizliklar o‘rganiladi. Musbat bog‘liqlik tushunchasi, uning asosiy xossalari hamda maksimal funksiyalar uchun baholash usullari keltiriladi. Kolmogorov tipidagi maksimal tengsizliklarning umumlashtirilgan ko‘rinishlari hosil qilinadi va ularning ehtimollar nazariyasidagi qo‘llanilishlari ko‘rsatib beriladi. PQD (Positive Quadrant Dependence), LPQD (Linearly Positive Quadrant Dependence) va NA (Negative Association) kabi bog‘liqlik turlari ko‘rib chiqilib, maksimal tengsizliklarning umumlashtirilgan ko‘rinishlari keltiriladi.

Key words: musbat bog‘liqlik, maksimal tengsizlik, LPQD, PQD, tasodifiy miqdorlar, kovariatsiya, moment baholar.

Kirish

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘liqlik strukturasi o‘rganish muhim masalalardan biridir. Xususan, musbat bog‘liqlik tushunchasi ko‘plab amaliy va nazariy masalalarda uchraydi. Musbat bog‘langan tasodifiy miqdorlar uchun klassik mustaqil holatda o‘rinli bo‘lgan tengsizliklarni umumlashtirish dolzarb hisoblanadi. Ayniqsa, maksimal yig‘indilar uchun baholar limit teoremlarni isbotlashda muhim rol o‘ynaydi.

Asosiy tushunchalar

Musbat bog‘liqlik: Tasodifiy miqdorlar $X_1, X_2, \dots, X_n$ musbat bog‘langan deyiladi, agar ixtiyoriy ortuvchi funksiyalar f va g uchun:

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$$

PQD (Positive Quadrant Dependence): Ikki tasodifiy miqdor X va Y PQD deyiladi, agar:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

LPQD (Linearly PQD): Ketma-ketlik $\{X_n\}$ LPQD

Compiled on: April 15, 2026.

Copyright: ©2026 by the authors. Submitted to *Advances in Science and Environment* for possible open access publication under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution \(CC BY\) 4.0 license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

deyiladi, agar har qanday musbat koeffitsiyentlar uchun chiziqli kombinatsiya ham PQD xossaga ega bo'lsa.

NA (Negative Association): Taqqoslash uchun:

$$\text{Cov}(f(X), g(Y)) \leq 0$$

Bu musbat bog'liqlikka qarama-qarshi tushunchadir.

Maksimal yig'indi va klassik natija: Qisman yig'indilar:

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

Maksimal yig'indi:

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$$

Bog'liqsiz holatda Kolmogorov maksimal tengsizligi:

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{E[S_n^2]}{\lambda^2}$$

Musbat bog'liqlik uchun maksimal tengsizliklar.

Teorema-1 (Umumlashtirilgan maksimal tengsizlik): Agar $\{X_n\}$ musbat bog'langan bo'lib, $E[X_i] = 0$, $E[X_i^2] < \infty$ bo'lsa, u holda:

$$P(M_n \geq \lambda) \leq \frac{C}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n E[X_i^2]$$

bu yerda $C > 0$ – o'zgarmas.

Teorema-2 (LPQD uchun maksimal tengsizlik): Agar $\{X_n\}$ LPQD bo'lsa, yuqoridagi tengsizlik saqlanadi va baholash yanada aniqroq bo'ladi.

Teorema-3 (Rozental tipidagi tengsizlik): Agar $p \geq 2$, u holda:

$$E\left[\max_{k \leq n} |S_k|^p\right] \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n E[|X_i|^p] + \left(\sum_{i=1}^n E[X_i^2] \right)^{p/2} \right)$$

Isbot: dispersiyani yoyamiz:

$$E[S_n^2] = \sum_{i=1}^n E[X_i^2] + 2 \sum_{i < j} E[X_i X_j]$$

Musbat bog'liqlikdan:

$$E[X_i X_j] \geq 0$$

Natija:

$$E[S_n^2] \leq C \sum E[X_i^2]$$

Chebishev tengsizligi orqali maksimal baho olinadi.

Moment maksimal tengsizliklar:

$$E[M_n^p] \leq C_p \sum_{i=1}^n E[|X_i|^p]$$

va kuchaytirilgan ko'rinish:

$$E[M_n^p] \leq C n^{p/2}$$

agar momentlar chegaralangan bo'lsa.

Misol: $X_i = Y + \varepsilon_i$

bu yerda: Y – umumiy factor

ε_i – mustaqil tasodifiy miqdorlar

Bu holda X_i lar musbat bog'langan bo'ladi va yuqoridagi maksimal tengsizliklar qo'llaniladi.

Xulosa

Musbat bog'langan tasodifiy miqdorlar uchun maksimal tengsizliklar mustaqil holatdagi klassik natijalarni umumlashtiradi. LPQD va PQD kabi kuchliroq bog'liqlik shartlari ostida yanada aniq baholar olinadi. Ushbu natijalar ehtimollar nazariyasining zamonaviy yo'nalishlarida muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Esary, J.D., Proschan, F., Walkup, D.W. Association of random variables, with applications. *Annals of Mathematical Statistics*, 38(5), 1466–1474.
2. Lehmann, E.L. Some concepts of dependence. *Annals of Mathematical Statistics*, 37(5), 1137–1153.
3. Joag-Dev, K., Proschan, F. Negative association of random variables with applications. *Annals of Statistics*, 11(1), 286–295.

4. Newman, C.M. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. *Inequalities in Statistics and Probability*, IMS, 127-140.
5. Shao, Q.M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 13(2), 343-356.
6. Oliveira, P.E. *Asymptotics for Associated Random Variables*. Springer.
7. Birkel, T. Moment bounds for associated sequences. *Annals of Probability*, 16(3), 1184-1193.